

Robotik I im WS 2017/18

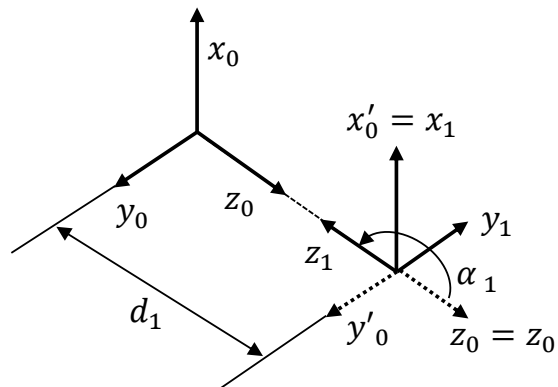
Musterlösungen zum 2. Übungsblatt

Prof. Dr.-Ing. Tamim Asfour
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann
M.Sc. Fabian Paus
M.Sc. Samuel Rader
Dipl.-Inform. Peter Kaiser
Adenauerring 2, Geb. 50.20
Web: <http://h2t.anthropomatik.kit.edu>

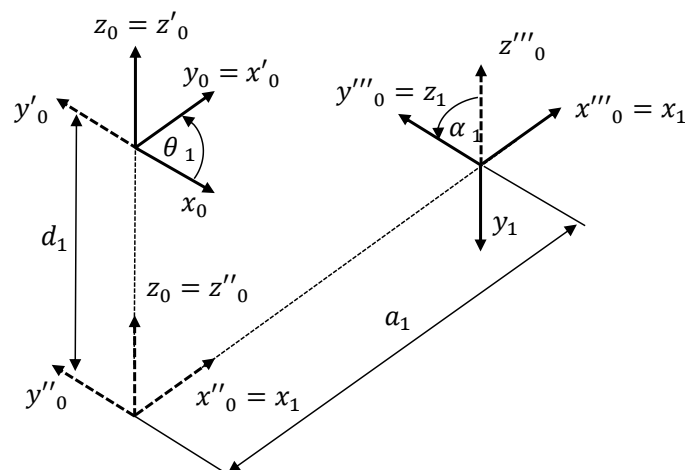
Lösung 1

(Vorwärtskinematik, Denavit-Hartenberg)

1. $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$



2. $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$



Lösung 2

(Vorwärtskinematik, Denavit-Hartenberg)

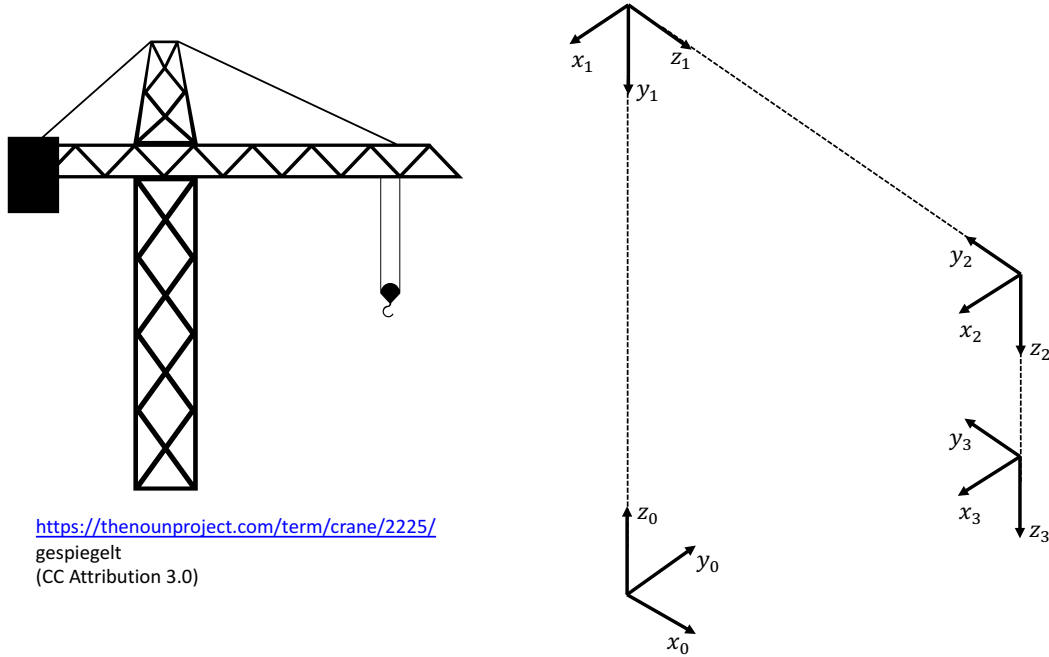
Unterschiedliche Lösungen sind möglich, abhängig davon wie die frei wählbaren x und z Achsen definiert werden. Eine mögliche Lösung für die DH-Parameter des ARMAR-4 Arms finden Sie in der folgenden Tabelle.

<i>Gelenk</i>	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1	θ_1	0	0	75
G2	$\theta_2 + 90$	200	0	-90
G3	$\theta_3 - 105$	0	0	90
G4	$\theta_4 + 90$	300	10	90
G5	θ_5	0	0	-90
G6	$\theta_6 - 90$	250	0	-90
G7	$\theta_7 - 90$	0	0	-90
G8	θ_8	0	60	0

Lösung 3

4

1. DH-Parameter des Krans



<https://thenounproject.com/term/crane/2225/>
 gespiegelt
 (CC Attribution 3.0)

Abbildung 1: Kranstruktur

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20	0	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \leq d_2 \leq 15$	0	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \leq d_3 \leq 20$	0	0°

Transformationsmatrix des Endeffektors

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_{0,3} &= T_{0,1}T_{1,2}T_{2,3} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ)d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ)d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{2,3} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ)d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ)d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Allgemeine Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\begin{aligned}
x &= -\sin(\theta_1 - 90)d_2 \\
y &= \cos(\theta_1 - 90)d_2 \\
z &= -d_3 + 20 \\
\beta &= \arcsin(-n_z) = \arcsin(-0) = 0 \\
\cos(\beta)\sin(\alpha) &= 0, \cos(\beta)\cos(\alpha) = a_z = -1 \Rightarrow \alpha = \pi \\
\gamma &= \arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_1 - 90)}{\cos(\theta_1 - 90)}\right) = \arctan(\tan(\theta_1 - 90)) = \theta_1 - 90
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \theta_1} &= -\cos(\theta_1 - 90)d_2 \\
\frac{\partial y}{\partial \theta_1} &= -\sin(\theta_1 - 90)d_2 \\
\frac{\partial z}{\partial \theta_1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial d_2} &= -\sin(\theta_1 - 90) \\
\frac{\partial y}{\partial d_2} &= \cos(\theta_1 - 90) \\
\frac{\partial z}{\partial d_2} &= 0
\end{aligned}$$

x und y hängen nicht von d_3 ab, weshalb ihre Ableitung nach d_3 0 ergibt. Die Ableitung von z nach d_3 ergibt -1.

α, β und γ hängen nicht von d_2, d_3 und die jeweiligen Ableitungen sind 0. Beim Ableiten nach θ_1 hängt nur γ von θ_1 ab und ergibt 1, die Ableitung von α und β ist auch hier 0.

Daraus ergibt sich die folgende Jacobi-Matrix J

$$J = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1 - 90^\circ)d_2 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ -\sin(\theta_1 - 90^\circ)d_2 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um die Jacobi-Matrix für eine konkrete Endeffektorkonfiguration zu erhalten, müssen die Werte θ_1, d_2, d_3 in J eingesetzt werden.

3. Berechnung der Endeffektorgeschwindigkeit

i.)

$$J(\mathbf{q}_1)\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii.)

$$J(\mathbf{q}_1)\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

iii.)

$$J(\mathbf{q}_2)\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

iv.)

$$J(\mathbf{q}_2)\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann auch die Jacobi-Matrix für eine spezifische Konfiguration bestimmt werden, ohne die allgemeine Jacobi-Matrix zu berechnen. Wie aus der Vorlesung bekannt wird die i -te Spalte der Jacobi-Matrix folgendermaßen berechnet:

- i.) Translationsgelenk entlang Achse $\mathbf{v}_i$: $\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$
- ii.) Rotationsgelenk um die Achse $\mathbf{v}_i$, das sich an Position $\mathbf{r}_i$ befindet und sich auf den Endeffektor auswirkt: $\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \times (f(\mathbf{q}) - \mathbf{r}_i) \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$

Die Funktion $f(\mathbf{q})$ bestimme die Pose des Endeffektors im Basiskoordinatensystem. Beispiel für die Berechnung der Jacobi-Matrix für die Konfiguration $\mathbf{q}_1$:

- Gelenk 1 Bewegt sich um z -Achse, die im Ursprung liegt:

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}_1)}{\partial \mathbf{q}_{1,1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_z \times (f(\mathbf{q}_1) - \mathbf{0}) \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_z \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}$$

- Gelenk 2 wird entlang der y -Achse bewegt, da Kran um 90° gedreht:

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}_1)}{\partial \mathbf{q}_{1,2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Gelenk 3 wird entlang der negativen z -Achse bewegt, da die Nullposition des Gelenks auf +20m liegt:

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}_1)}{\partial \mathbf{q}_{1,3}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{e}_z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Verwendet man die Ergebnisse von Gelenk 1, Gelenk 2 und Gelenk 3 als Spalten der Jacobi-Matrix, erhält man:

$$J(\mathbf{q}_1) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$